DOI: 10.18372/2410-7840.18.11090
УДК 513.193.1, 62-501.1

СИНТЕЗ СИММЕТРИЧНЫХ СИСТЕМ ФУНКЦИЙ ЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ

Анатолий Белецкий, Владимир Лужецкий

В статье рассматриваются вопросы формирования симметричных Уолша-подобных систем функций золотого сечения (ФЗС) двоично-степенного порядка. В основу построения систем ФЗС положен метод кронекерова произведения, применяемый при синтезе систем Уолша-Кронекера. Порождающей матрицей систем Уолша-Кронекера является матрица Адамара второго порядка, в которой элемент -1 замещен элементом -α, равным отношению золотой пропорции. Предложены алгоритмы прямого синтеза систем ФЗС произвольного двоично-степенного порядка, подобных классическим системам Уолша-Адамара и Уолша-Пэли. Синтез полного множества симметричных ФЗС систем осуществляется перестановкой базисных функций систем Уолша, упорядоченных по Адамару или Пэли. Правила перестановки функций устанавливаются индикаторными матрицами соответствующих систем. Индикаторными служат невырожденные над полем F_2 симметричные относительно главной диагонали (для Адамара-связанных систем) или вспомогательной диагонали (для Пэли-связанных систем) бинарные матрицы, причем вес (равный сумме единичек) каждого столбца (как и строки) матриц должен быть нечетным числом.

Ключевые слова: *системы функций Уолша, индикаторные матрицы систем Уолша, кронекерово произведение, золотая пропорция, Уолша-подобные системы функций золотого сечения.*

1. Введение и постановка задачи исследования. В теории и приложениях спектрального анализа и помехоустойчивого кодирования дискретных сигналов [1, 2], криптографической защиты информации [3] и в других областях науки и техники [4, 5] находят широкое применение так называемые симметричные системы дискретных функций, примером которых служат системы функций Уолша [6] двоично-степенного порядка $N = 2^n$, где n – натуральное число.

Системами функций Уолша называют совокупность знаковых функций, образующих ортогональные полные множества, и принимающих кусочно-постоянные значения $+1$ и -1 на всей области определения [6]. Отличительные особенности классических функций Уолша состоят в том, что, во-первых, они содержат одинаковое число плюс и минус единичек на обеих половинках их интервала определения N. Исключение составляют лишь функции, одна из которых на всем интервале принимает значение 1, а вторая функция такова, что левая её половинка состоит из элементов 1, а правая – из элементов -1. Во-вторых, все функции Уолша являются попарно эквидистантными, причем расстояние Хэмминга для любой пары функций составляет величину d, равную $N/2$. И, наконец, в-третьих, системы функций Уолша N – го порядка являются полными в том смысле, что не существует никаких других функций, которые были бы ортогональны ко всем N функциям, входящим в систему, находясь от них на расстоянии Хэмминга $d = N/2$.

Дальнейшим расширением множества систем функций Уолша являются знакопеременные *секвентные функции* [7], отличающиеся от классических функций Уолша тем, что их левые и правые половинки двоично-степенных интервалов N совсем не обязательно содержат одинаковое число ± 1. Пример такой системы $\boldsymbol{S}_N$ восьмого порядка представлен ниже следующим соотношением

$$\boldsymbol{S}_8 = \{s(k,t)\} = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \to t \\ \begin{array}{c} 0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7 \end{array} & \begin{pmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & - & - & + & + & - & - & + \\ + & - & + & + & - & + & - & - \\ + & + & + & - & - & - & - & + \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & - & + & - & + & - & + & - \\ + & - & - & - & - & + & + & + \\ + & + & - & + & - & - & + & - \end{pmatrix} \\ \downarrow k & \end{array},$$

в котором k и t – номер (порядок) и аргумент (нормированное дискретное время) базисных эквидистантных функций $s(k,t)$ системы $\boldsymbol{S}_N$.

Как показали результаты анализа [7] на интервале $N = 8$ существует 36 секвентных функций $s(k,t)$, которые совместно составляют 30 различных полных групп эквидистантных функций с расстоянием Хэмминга $d_s = N/2$, причем для каждой группы методом направленного перебора базисных функций могут быть образованы по 28 симметричных секвентных систем $\boldsymbol{S}_8$, то есть ровно столько же, сколько существует классических систем Уолша восьмого порядка [8].

Главная цель данного исследования состоит в разработке нового подкласса симметричных систем эквидистантных квазиортогональных кусочно-постоянных на двоично-степенном интервале определения дискретных секвентных функций, названных *функциями золотого сечения*, или иначе функциями, образуемыми отношением *золотой пропорции* [9].

2. Основные соотношения. В основу построения систем функций золотого сечения (ФЗС) двоично-степенного порядка N положен метод кронекерова произведения, который применяется при синтезе систем Уолша-Кронекера, называемых также системами Уолша-Адамара $\boldsymbol{H}_N$. Порождающей матрицей для систем Уолша-Кронекера является матрица Адамара второго порядка

$$\boldsymbol{H}_2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Заменив в матрице (1) единицу отрицательного элемента отношением золотой пропорции

$$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cong 1.618, \qquad (2)$$

приходим к порождающей матрице систем ФЗС, в которой для компактности записи будем отображать элемент $-\alpha$ в виде $\bar{\alpha}$

$$\boldsymbol{H}_2^{(g)}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & \bar{\alpha}\end{pmatrix}. \qquad (3)$$

В матрице (3), как и далее по тексту, верхний индекс g подчеркивает, что рассматриваемый математический объект (в данном случае – матрица) относится к ФЗС системам.

ФЗС системы Уолша-Кронекера двоично-степенного порядка $N=2^n$ определяются соотношением

$$\boldsymbol{H}_{2^n}^{(g)}=\boldsymbol{H}_{2^{n-1}}^{(g)}\times\boldsymbol{H}_2^{(g)}, \qquad (4)$$

где $\times$ – знак произведения Кронекера, и называются Уолша-подобными ФЗС системами Кронекера или просто – ФЗС системами Уолша-Кронекера.

В частности, согласно выражениям (3) и (4), получим

$$\boldsymbol{H}_4^{(g)}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & \bar{\alpha}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & \bar{\alpha}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & \bar{\alpha} & 1 & \bar{\alpha}\\ 1 & 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha}\\ 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} & \alpha^2\end{pmatrix}; \qquad (5)$$

$$\boldsymbol{H}_8^{(g)}=\boldsymbol{H}_4^{(g)}\times\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & \bar{\alpha}\end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{H}_8^{(g)}=\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccccccc}0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\end{array}\ \ t \\ \begin{array}{c}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\k\end{array} & \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & \bar{\alpha} & 1 & \bar{\alpha} & 1 & \bar{\alpha} & 1 & \bar{\alpha}\\ 1 & 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} & 1 & 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha}\\ 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} & \alpha^2 & 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} & \alpha^2\\ 1 & 1 & 1 & 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} & \bar{\alpha}\\ 1 & \bar{\alpha} & 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} & \alpha^2 & \bar{\alpha} & \alpha^2\\ 1 & 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} & \alpha^2 & \alpha^2\\ 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} & \alpha^2 & \bar{\alpha} & \alpha^2 & \alpha^2 & \bar{\alpha}^3\end{pmatrix}\end{array}. \qquad (6)$$

Нормализованные (по уровню) графики функций золотого сечения, обозначим их через $g(k,t)$, входящие в систему (6), показаны на рис 1.

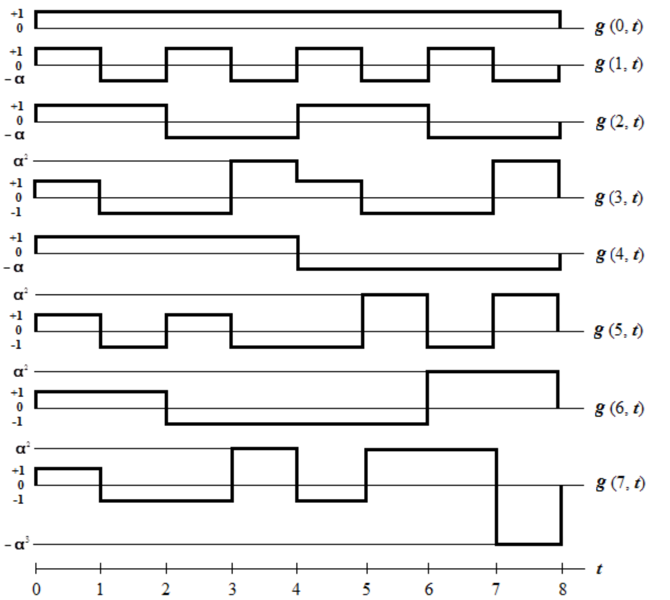

Рис. 1. Базисные ФЗС восьмого порядка

Матрицы (5) и (6) и графики, приведенные на рис. 1, дают возможность установить такие особенности систем ФЗС. Во-первых, базисы на основе предлагаемых функций золотого сечения утрачивают (в отличие от базисов Уолша) свойство ортонормированности. Базис ФЗС можно привести к нормированной форме, при этом энергия каждой функции $g(k,t)$ станет равной единице, если умножить k - ю базисную функцию системы на нормирующий множитель

$$\mu_k = 1/\sqrt{\sum_{n=0}^{N-1} g^2(k,n)}\,. \qquad (7)$$

Согласно (7) нормированные множители для базиса $\boldsymbol{H}_4^{(g)}$ таковы:

$$\mu_0^{-1} = 2\,;\;\; \mu_1^{-1} = \mu_2^{-1} = \sqrt{2(1+\alpha^2)}\,;\;\; \mu_3^{-1} = 1+\alpha^2\,.$$

И, во-вторых, как и в классических системах Уолша, расстояние Хэмминга d_g между любыми парами ФЗС систем N - го порядка определяется выражением $d_g = N/2$, причем под d_g в данном случае следует понимать то расстояние Хэмминга, на которое разнесены знаки произвольных пар функций золотого сечения, входящих в систему.

Нормирование и ортогонализация базисов ФЗС приводит к увеличению машинных ресурсов, необходимых для выполнения алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ). Вместе с тем ортонормирование базисов не является столь уж жестким требованием, предъявляемым к базисам процессоров БПФ. Более важными являются условия линейной независимости функций и симметричности матриц преобразования, которые для базисов в ФЗС системах Уолша выполняются по определению.

В силу причин, изложенных выше, в качестве базовых ФЗС систем примем системы Уолша-Кронекера, примеры которых четвертого и восьмого порядков представлены соотношениями (5) и (6) соответственно.

3. Синтез симметричных ФЗС систем. Как известно, классическая система функций Уолша-Кронекера (система Уолша-Адамара) двоично-степенного порядка N взаимно однозначно связана с диадно-упорядоченной системой функций Уолша (упорядоченной по Пэли), кратко называемой системой Уолша-Пэли. Матрицы систем Уолша-Адамара, двоичные номера строк которых подвергнуты двоично-инверсной перестановке (ДИП-преобразованию), порождают матрицы частотно-упорядоченных систем Уолша-Пэли и наоборот.

Аналогичным образом, если номера строк матриц функций золотого сечения Уолша-Адамара переставить по правилу двоичной инверсии, то образуются ФЗС системы Уолша-Пэли и наоборот. ФЗС система Уолша-Пэли восьмого порядка представлена ниже следующей матрицей

$$\boldsymbol{P}_8^{(g)} = \begin{array}{c} \\ 0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\ k \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \;\; t \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \bar\alpha & \bar\alpha & \bar\alpha & \bar\alpha \\ 1 & 1 & \bar\alpha & \bar\alpha & 1 & 1 & \bar\alpha & \bar\alpha \\ 1 & 1 & \bar\alpha & \bar\alpha & \bar\alpha & \bar\alpha & \alpha^2 & \alpha^2 \\ 1 & \bar\alpha & 1 & \bar\alpha & 1 & \bar\alpha & 1 & \bar\alpha \\ 1 & \bar\alpha & 1 & \bar\alpha & \bar\alpha & \alpha^2 & \bar\alpha & \alpha^2 \\ 1 & \bar\alpha & \bar\alpha & \alpha^2 & 1 & \bar\alpha & \bar\alpha & \alpha^2 \\ 1 & \bar\alpha & \bar\alpha & \alpha^2 & \bar\alpha & \alpha^2 & \alpha^2 & \bar\alpha^3 \end{pmatrix} \\ \\ \end{array} . \qquad (8)$$

Классическим системам функций Уолша-Адамара ($\boldsymbol{H}_N$) и Уолша-Пэли ($\boldsymbol{P}_N$) принадлежит важнейшая роль во множестве систем функций Уолша. Как уже было отмечено выше, двоичные номера базисных функций этих систем связаны оператором ДИП, что иллюстрируется графом, показанным на рис. 2.

$$H \xleftrightarrow{\text{ДИП}} P$$

Рис. 2. Взаимосвязь систем функций Уолша-Адамара и Уолша-Пэли

Кроме систем $\boldsymbol{H}_N$ и $\boldsymbol{P}_N$ существуют и другие симметричные системы Уолша $\boldsymbol{W}_N$, общее число которых L_N, $N = 2^n$, определяется соотношением [8]

$$L_N = \prod_{i=1}^{n} (2^i - (i)_2)\,, \qquad (9)$$

где $n = \log_2 N$ и $(l)_m$ – вычет числа l по модулю m.

Ряд значений L_N, рассчитанных по формуле (9), приведены в табл. 1

Таблица 1

Оценка числа симметричных систем функций Уолша

N	2	4	8	16	32	64	128
L_N	1	4	28	448	13'888	888'832	112'881'664

Каждой системе функций Уолша отвечает однозначно связанная с ней так называемая *индикаторная матрица системы* [10].

Определение 1. *Индикаторными матрицами* $\boldsymbol{J}_w$ *систем функций Уолша* $\boldsymbol{W}_N$ двоично-степенного порядка $N = 2^n$, где n – натуральное число, являются правосторонне симметрические (0,1) – матрицы n-го порядка, то есть матрицы, симметричные относительно вспомогательной диагонали, невырожденные над полем F_2.

Индикаторные матрицы $\boldsymbol{J}_w$ систем Уолша дают возможность определить по ниже приведенной формуле место (номер строки k_w) в системе $\boldsymbol{W}$, которое занимают k- е базисные функции $p(k, t)$ системы Уолша-Пэли $\boldsymbol{P}$

$$k_w = k_p \cdot \boldsymbol{J}_w, \quad k_p = \overline{0, N-1}. \qquad (10)$$

Покажем, в качестве примера, индикаторную матрицу (ИМ) $\boldsymbol{J}_p$ системы Уолша-Пэли восьмого порядка, представляющую собой единичную матрицу третьего порядка, и ИМ $\boldsymbol{J}_h$ системы Уолша-Адамара, называемую *матрицей инверсной перестановки* или *обменной матрицей* (по Блейхуту [11])

$$\boldsymbol{J}_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{J}_h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (11)$$

являющиеся *инвариантами* (то есть их формы не зависят от порядка) *индикаторных матриц* систем Уолша.

В качестве ИМ $\boldsymbol{J}_w$ систем Уолша $\boldsymbol{W}$ могут применяться не только правосторонне симметрические матрицы, при этом, согласно (10), центральной системой, порождающей все остальные системы Уолша, выступает система Уолша-Пэли $\boldsymbol{P}$, но и левосторонне симметрические матрицы (то есть матрицы, симметричные относительно главной диагонали). В таком варианте ИМ центральной системой, порождающей все оставшиеся системы Уолша $\boldsymbol{W}$, является система Уолша-Адамара $\boldsymbol{H}$.

К множеству левосторонне симметрических ИМ, обозначим их $\tilde{\boldsymbol{J}}_w$, приходим в результате инверсии столбцов матриц $\boldsymbol{J}_w$. Перестановкой строк матрицы Уолша-Адамара $\boldsymbol{H}$ по формуле

$$k_w = k_h \cdot \tilde{\boldsymbol{J}}_w, \quad k_h = \overline{0, N-1}, \qquad (12)$$

может быть составлена матрица произвольной системы $\boldsymbol{W}$. Матрицы ИМ $\tilde{\boldsymbol{J}}_p$ и $\tilde{\boldsymbol{J}}_h$ совпадают с матрицами $\boldsymbol{J}_p$ и $\boldsymbol{J}_h$, приведенными в (11), что и послужило дополнительным основанием назвать их инвариантами.

В том случае, когда синтез матриц Уолша осуществляется с помощью правосторонне симметрических ИМ, то формируемое множество систем Уолша называют Пэли-связанным. Если же синтез матриц Уолша проводится на основе левосторонне симметрических ИМ, то образуемые системы Уолша называют Адамара-связанными [12]. Обе эти системы состоят из одних и тех же элементов (матриц Уолша), то есть оказываются *эквивалентными* или *приводимыми* одна к другой.

Индикаторные матрицы обеспечивают экономный способ представления систем Уолша двоично-степенного порядка, поскольку порядок n ИМ равен логарифму по основанию 2 от порядка N систем Уолша. Так, например, любая матрица Уолша 256 порядка вполне однозначно представима своей индикаторной матрицей восьмого порядка. Вместе с тем, следует отметить, что существуют также симметричные системы Уолша, порядок которых кратен четырем, но отличен от двоично-степенного порядка, для которых ИМ отсутствуют.

Каждой ФЗС системе $\boldsymbol{W}^{(g)}$, как и классическим системам функций Уолша $\boldsymbol{W}$, отвечает своя индикаторная матрица $\boldsymbol{J}_w^{(g)}$. Обратимся к ФЗС системам Уолша-Адамара и Уолша-Пэли, представленными матрицами (6) и (8). Обе эти матрицы могут быть использованы в качестве образующих всех остальных (пока неизвестных) симметричных ФЗС матриц восьмого порядка.

Обратим внимание на такую особенность матриц (систем) $\boldsymbol{H}_8^{(g)}$ и $\boldsymbol{P}_8^{(g)}$. Нижняя строка, как и правый столбец матриц (6) или (8), не могут быть переставлены ни на какое другое место, так как это приводит к нарушению симметричности вновь образованной матрицы $\widehat{\boldsymbol{W}}_8^{(g)}$. Потерю симметричности матриц $\widehat{\boldsymbol{W}}_8^{(g)}$ можно объяснить достаточно просто. В самом деле, пусть последняя (седьмая) строка (базисная функция седьмого порядка) матриц (6) или (8) перемещается на некую k – ю строку. Для сохранения симметричности матрицы $\widehat{\boldsymbol{W}}_8^{(g)}$ необходимо, чтобы в исходной матрице ($\boldsymbol{H}_8^{(g)}$ или $\boldsymbol{P}_8^{(g)}$) существовал k - й столбец, нижний элемент которого равен $\overline{\alpha}^3$. Но поскольку такой столбец в матрицах $\boldsymbol{H}_8^{(g)}$ и $\boldsymbol{P}_8^{(g)}$ отсутствует, то, тем самым, исключается возможность перемещения нижних строк образующих матриц на какую-либо другую строку.

Отмеченное свойство характерно не только для матриц $\boldsymbol{H}_8^{(g)}$ и $\boldsymbol{P}_8^{(g)}$, но также и для матриц $\boldsymbol{H}_N^{(g)}$, $\boldsymbol{P}_N^{(g)}$ произвольного двоично-степенного порядка N.

Покажем, что ИМ систем ФЗС должны удовлетворять требованию, изложенному в ниже следующем Утверждении.

Утверждение. Индикаторные матрицы $\boldsymbol{J}_w^{(g)}$ (как и $\tilde{\boldsymbol{J}}_w^{(g)}$) ФЗС систем $\boldsymbol{W}^{(g)}$ составляют подмножество таких ИМ $\boldsymbol{J}_w$ (или $\tilde{\boldsymbol{J}}_w$) классических систем Уолша $\boldsymbol{W}$, вес каждого столбца (как и строки) которых является нечетным числом.

Доказательство. В самом деле, как об этом сказано выше, индикаторными матрицами n – го порядка $\boldsymbol{J}_w^{(g)}$ (или $\tilde{\boldsymbol{J}}_w^{(g)}$) систем $\boldsymbol{W}_N^{(g)}$, $N = 2^n$, являются такие ИМ $\boldsymbol{J}_w$ систем $\boldsymbol{W}_N$, которые сохраняют положение нижней $(2^n - 1)$-й строки матрицы $\boldsymbol{W}_N$. Следовательно, ИМ $\boldsymbol{J}_w^{(g)}$ (как и $\tilde{\boldsymbol{J}}_w^{(g)}$) должны поддерживать равенство

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{J}_w^{(g)} = \boldsymbol{x}\,, \qquad (13)$$

где $\boldsymbol{x}$ есть n - битный вектор, состоящий из одних единиц, т. е.

$$\boldsymbol{x} = 2^n - 1 = \underbrace{11\ldots1}_{n\ \text{бит}}$$

и равен номеру нижней строки матрицы $\boldsymbol{W}_N$.

Условие (13) сохраняется (напомним, что матричные операции выполняют над полем F_2), если только все столбцы ИМ $\boldsymbol{J}_w$ обладают нечетными весами, что и завершает доказательство Утверждения.

Строки ИМ $\boldsymbol{J}_w^{(g)}$ (как и $\tilde{\boldsymbol{J}}_w^{(g)}$) также имеют нечетные веса, что является следствием симметричности матриц.

Сформулированное выше Утверждение приводит к такому определению ИМ ФЗС систем.

Определение 2. *Индикаторными матрицами Уолша-подобных ФЗС систем* $\boldsymbol{W}^{(g)}$ являются невырожденные над полем F_2 правосторонне симметрические матрицы $\boldsymbol{J}_w^{(g)}$, вес каждого столбца (и каждой строки) которой является нечетным числом.

Данным определением раскрывается суть алгоритма компьютерных вычислений ИМ $\boldsymbol{J}_w^{(g)}$ (а также $\tilde{\boldsymbol{J}}_w^{(g)}$) и оценки их количества $L_N^{(g)}$, как функции от порядка N ФЗС систем. Фрагмент ряда значений $L_N^{(g)}$ приведен в табл. 2.

Таблица 2

Оценка числа индикаторных матриц ФЗС систем

N	2	4	8	16	32	64
$L_N^{(g)}$	1	2	4	32	448	14'336

На рис. 3 приведен граф Пэли-связанных ФЗС систем восьмого порядка

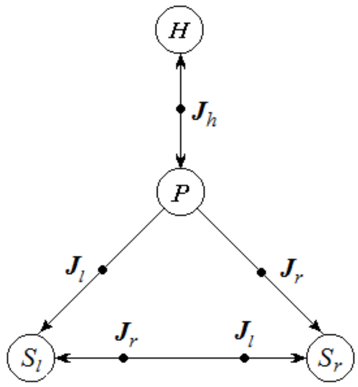

Рис. 3. Взаимосвязь номеров базисных функций в системах $\boldsymbol{W}^{(g)}$ восьмого порядка

Матрица ИМ третьего порядка: $\boldsymbol{J}_r$ - циклического сдвига (**S**hift) на один разряд вправо (**r**ight) и $\boldsymbol{J}_l$ – циклического сдвига на один разряд влево (**l**eft), имеют вид

$$\boldsymbol{J}_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{J}_l = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (14)$$

Индикаторным матрицам (14) отвечают, согласно (10), ФЗС системы

$$\boldsymbol{S}_{8,r}^{(g)} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ k \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \quad t \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} & 1 & 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} \\ 1 & \bar{\alpha} & 1 & \bar{\alpha} & 1 & \bar{\alpha} & 1 & \bar{\alpha} \\ 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} & \alpha^2 & 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} & \alpha^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} \\ 1 & 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} & \alpha^2 & \alpha^2 \\ 1 & \bar{\alpha} & 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} & \alpha^2 & \bar{\alpha} & \alpha^2 \\ 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} & \alpha^2 & \bar{\alpha} & \alpha^2 & \alpha^2 & \bar{\alpha}^3 \end{pmatrix} \\ \\ \end{array}, \qquad (15)$$

$$
\boldsymbol{S}_{8,l}^{(g)} = \begin{array}{c} \\ 0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\k \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \quad t \\
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & \overline{\alpha} & 1 & \overline{\alpha} & 1 & \overline{\alpha} & 1 & \overline{\alpha} \\
1 & 1 & 1 & 1 & \overline{\alpha} & \overline{\alpha} & \overline{\alpha} & \overline{\alpha} \\
1 & \overline{\alpha} & 1 & \overline{\alpha} & \overline{\alpha} & \alpha^2 & \overline{\alpha} & \alpha^2 \\
1 & 1 & \overline{\alpha} & \overline{\alpha} & 1 & 1 & \overline{\alpha} & \overline{\alpha} \\
1 & \overline{\alpha} & \overline{\alpha} & \alpha^2 & 1 & \overline{\alpha} & \overline{\alpha} & \alpha^2 \\
1 & 1 & \overline{\alpha} & \overline{\alpha} & \overline{\alpha} & \overline{\alpha} & \alpha^2 & \alpha^2 \\
1 & \overline{\alpha} & \overline{\alpha} & \alpha^2 & \overline{\alpha} & \alpha^2 & \alpha^2 & \overline{\alpha}^3
\end{pmatrix}
\end{array} . \quad (16)
$$

В известных литературных источниках, например, [6], для матриц систем функций Уолша, упорядоченных по Адамару или Пэли, приводятся лишь *итерационные алгоритмы синтеза* систем, суть которых состоит в том, что матрицы преобразования ($\boldsymbol{H}$ или $\boldsymbol{P}$) 2^n - го порядка можно вычислить, если известны соответствующие матрицы 2^{n-1} - го порядка. Для Уолша-подобных ФЗС систем, представленных на рис. 3 и названных нами *фундаментальными системами*, ниже предложены *алгоритмы прямого синтеза* матриц преобразования систем $\boldsymbol{H}_N^{(g)}$, $\boldsymbol{P}_N^{(g)}$, $\boldsymbol{S}_{N,r}^{(g)}$ и $\boldsymbol{S}_{N,l}^{(g)}$ произвольного двоично-степенного порядка $N = 2^{n-1}$.

Безотносительно к способу упорядочения ФЗС систем их базисные функции нулевого порядка $\varphi(0, n)$, занимающие верхнюю строчку матриц преобразования, равны 1, т.е.

$$\varphi(0, n) = 1, \quad n = \overline{0, N-1}.$$

Матрицы преобразования фундаментальных ФЗС систем однозначно определяются своими базисными функциями первого порядка; в силу чего эти функции названы *образующими функциями систем* (табл. 3).

Таблица 3

Образующие функции фундаментальных Уолша-подобных систем ФЗС

Системы	Образующие функции
$\boldsymbol{H}_N^{(g)}$	$h(1, n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n - \text{четное;} \\ \overline{\alpha}, & \text{если } n - \text{нечетное.} \end{cases}$
$\boldsymbol{P}_N^{(g)}$	$p(1, n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = \overline{0, N/2-1}; \\ \overline{\alpha}, & \text{если } n = \overline{N/2, N-1}. \end{cases}$
$\boldsymbol{S}_{N,r}^{(g)}$	$s_r(1, n) = 2 \circ p_{N/2}(1, n), \quad n = \overline{0, N/2-1}.$
$\boldsymbol{S}_{N,l}^{(g)}$	$s_l(1, n) = h(1, n), \quad n = \overline{0, N-1}.$

Для системы $\boldsymbol{S}_{N,r}^{(g)}$ функцию $2 \circ p_{N/2}(1, n)$ следует понимать так, что базисная функция $p(1, n)$ системы $\boldsymbol{P}_{N/2}^{(g)}$ повторяется дважды.

Опираясь на элементарный анализ свойств матриц (5) и (6), приходим к следующему алгоритму синтеза базисных функций $k-$го порядка, $k \geq 2$, ФЗС систем Уолша-Адамара

$$h(2k, n) = h(k, n)^{[*]} \quad (17)$$

– для четных и;

$$h(2k+1, n) = h(2k, n) \cdot h(1, n) \quad (18)$$

– для нечетных базисных функций.

Значок [*] в правой части выражения (17) означает, что каждый n - й элемент k - й строки матрицы системы $\boldsymbol{H}_N^{(g)}$ записывается дважды.

Алгоритм прямого синтеза базисных функций $p(k, n)$, $k \geq 2$, ФЗС систем Уолша-Пэли $\boldsymbol{P}_N^{(g)}$ сводится к простым вычислениям

$$p(2k, n) = p(k, (2n)_N) \quad (19)$$

– для четных и;

$$p(2k+1, n) = p(2k, n) \cdot p(1, n) \quad (20)$$

– для нечетных базисных функций.

Из сопоставления выражений (18) и (20), а также матриц (15) и (16), приходим к заключению, что нечетные базисные функции $\varphi(2k+1, n)$, $k \geq 1$, фундаментальных Уолша-подобных ФЗС систем определяются по единому правилу

$$\varphi(2k+1, n) = \varphi(2k, n) \cdot \varphi(1, n).$$

Четным базисным функциям ФЗС систем с ИМ типа циклических сдвигов присущи такие особенности. Для систем $\boldsymbol{S}_{N,r}^{(g)}$ левую половину функций $s_r(2k, n)$ находят по формуле, подобной формуле (19), то есть

$$s_r(2k, n) = s_r(k, 2n), \; n = \overline{0, N/2-1}, \quad (21)$$

а правая половина функции, обозначим её $s_r^+(2k, n)$, $n = \overline{N/2, N-1}$, удовлетворяет системе равенств

$$s_r^+(2k, n) = \begin{cases} s_r(k, (2n)_N), & \text{если } 2k < N/2; \\ \overline{\alpha} \cdot s_r(k, (2n)_N), & \text{если } 2k \geq N/2. \end{cases} \quad (22)$$

Для систем $\boldsymbol{S}_{N,l}^{(g)}$ левая половина всех четных базисных функций определяется выражением, совпадающим с формулой (21), то есть

$$s_l(2k,\ n) = s_l(k,\ 2n),\ n = \overline{0, N/2-1}, \qquad (23)$$

тогда как правая половина $s_l^{+}(2k,\ n)$ отвечает системе уравнений

$$s_l^{+}(2k,\ n) = \begin{cases} s_l(k,(2n)_N), & k - \text{четное;} \\ \bar{\alpha}\cdot s_l(k,(2n)_N), & k - \text{нечетное.} \end{cases} \qquad (24)$$

Ниже приведены таблицы ФЗС систем $\boldsymbol{P}_N^{(g)}$, $\boldsymbol{S}_{N,r}^{(g)}$ и $\boldsymbol{S}_{N,l}^{(g)}$, а также ИМ четвертого порядка (без инвариантных матриц $\boldsymbol{J}_p$ и $\boldsymbol{J}_h$), отвечающих системам 16-го порядка.

Таблица 4

ФЗС система Уолша-Пэли 16-го порядка

$\boldsymbol{P}_{16}^{(g)}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	11	12	13	14	15
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$
2	1	1	1	1	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	1	1	1	1	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$
3	1	1	1	1	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	α^2	α^2	α^2	α^2
4	1	1	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	1	1	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	1	1	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	1	1	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$
5	1	1	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	1	1	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	α^2	α^2	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	α^2	α^2
6	1	1	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	α^2	α^2	1	1	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	α^2	α^2
7	1	1	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	α^2	α^2	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	α^2	α^2	α^2	α^2	$\bar{\alpha}^3$	$\bar{\alpha}^3$
8	1	$\bar{\alpha}$	1	$\bar{\alpha}$	1	$\bar{\alpha}$	1	$\bar{\alpha}$	1	$\bar{\alpha}$	1	$\bar{\alpha}$	1	$\bar{\alpha}$	1	$\bar{\alpha}$
9	1	$\bar{\alpha}$	1	$\bar{\alpha}$	1	$\bar{\alpha}$	1	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	α^2	$\bar{\alpha}$	α^2	$\bar{\alpha}$	α^2	$\bar{\alpha}$	α^2
10	1	$\bar{\alpha}$	1	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	α^2	$\bar{\alpha}$	α^2	1	$\bar{\alpha}$	1	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	α^2	$\bar{\alpha}$	α^2
11	1	$\bar{\alpha}$	1	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	α^2	$\bar{\alpha}$	α^2	$\bar{\alpha}$	α^2	$\bar{\alpha}$	α^2	α^2	$\bar{\alpha}^3$	α^2	$\bar{\alpha}^3$
12	1	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	α^2	1	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	α^2	1	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	α^2	1	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	α^2
13	1	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	α^2	1	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	α^2	$\bar{\alpha}$	α^2	α^2	$\bar{\alpha}^3$	$\bar{\alpha}$	α^2	α^2	$\bar{\alpha}^3$
14	1	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	α^2	$\bar{\alpha}$	α^2	α^2	$\bar{\alpha}^3$	1	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	α^2	$\bar{\alpha}$	α^2	α^2	$\bar{\alpha}^3$
15	1	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	α^2	$\bar{\alpha}$	α^2	α^2	$\bar{\alpha}^3$	$\bar{\alpha}$	α^2	α^2	$\bar{\alpha}^3$	α^2	$\bar{\alpha}^3$	$\bar{\alpha}^3$	α^4

Таблица 5

ФЗС Уолша-подобная система $\boldsymbol{S}_{N,r}^{(g)}$ 16-го порядка

$\boldsymbol{S}_r^{(g)}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	1	1	1	1	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$
2	1	1	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	1	1	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	1	1	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	1	1	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$
3	1	1	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	α^2	α^2	1	1	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	α^2	α^2
4	1	$\bar{\alpha}$	1	$\bar{\alpha}$	1	$\bar{\alpha}$	1	$\bar{\alpha}$	1	$\bar{\alpha}$	1	$\bar{\alpha}$	1	$\bar{\alpha}$	1	$\bar{\alpha}$
5	1	$\bar{\alpha}$	1	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	α^2	$\bar{\alpha}$	α^2	1	$\bar{\alpha}$	1	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	α^2	$\bar{\alpha}$	α^2
6	1	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	α^2	1	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	α^2	1	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	α^2	1	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	α^2
7	1	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	α^2	$\bar{\alpha}$	α^2	α^2	$\bar{\alpha}^3$	1	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	α^2	$\bar{\alpha}$	α^2	α^2	$\bar{\alpha}^3$
8	1	1	1	1	1	1	1	1	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$
9	1	1	1	1	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	α^2	α^2	α^2	α^2
10	1	1	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	1	1	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	α^2	α^2	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	α^2	α^2
11	1	1	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	α^2	α^2	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	α^2	α^2	α^2	α^2	$\bar{\alpha}^3$	$\bar{\alpha}^3$
12	1	$\bar{\alpha}$	1	$\bar{\alpha}$	1	$\bar{\alpha}$	1	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	α^2	$\bar{\alpha}$	α^2	$\bar{\alpha}$	α^2	$\bar{\alpha}$	α^2
13	1	$\bar{\alpha}$	1	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	α^2	$\bar{\alpha}$	α^2	$\bar{\alpha}$	α^2	$\bar{\alpha}$	α^2	α^2	$\bar{\alpha}^3$	α^2	$\bar{\alpha}^3$
14	1	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	α^2	1	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	α^2	$\bar{\alpha}$	α^2	α^2	$\bar{\alpha}^3$	$\bar{\alpha}$	α^2	α^2	$\bar{\alpha}^3$
15	1	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	α^2	$\bar{\alpha}$	α^2	α^2	$\bar{\alpha}^3$	$\bar{\alpha}$	α^2	α^2	$\bar{\alpha}^3$	α^2	$\bar{\alpha}^3$	$\bar{\alpha}^3$	α^4

Таблица 6

ФЗС Уолша-подобная система $\boldsymbol{S}_{N,l}^{(g)}$ 16-го порядка

$\boldsymbol{S}_l^{(g)}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	11	12	13	14	15
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	$\overline{\alpha}$	1	$\overline{\alpha}$	1	$\overline{\alpha}$	1	$\overline{\alpha}$	1	$\overline{\alpha}$	1	$\overline{\alpha}$	1	$\overline{\alpha}$	1	$\overline{\alpha}$
2	1	1	1	1	1	1	1	1	$\overline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$
3	1	$\overline{\alpha}$	1	$\overline{\alpha}$	1	$\overline{\alpha}$	1	$\overline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$	α^2	$\overline{\alpha}$	α^2	$\overline{\alpha}$	α^2	$\overline{\alpha}$	α^2
4	1	1	1	1	$\overline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$	1	1	1	1	$\overline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$
5	1	$\overline{\alpha}$	1	$\overline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$	α^2	$\overline{\alpha}$	α^2	1	$\overline{\alpha}$	1	$\overline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$	α^2	$\overline{\alpha}$	α^2
6	1	1	1	1	$\overline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$	α^2	α^2	α^2	α^2
7	1	$\overline{\alpha}$	1	$\overline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$	α^2	$\overline{\alpha}$	α^2	$\overline{\alpha}$	α^2	$\overline{\alpha}$	α^2	α^2	$\overline{\alpha}^3$	α^2	$\overline{\alpha}^3$
8	1	1	$\overline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$	1	1	$\overline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$	1	1	$\overline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$	1	1	$\overline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$
9	1	$\overline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$	α^2	1	$\overline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$	α^2	1	$\overline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$	α^2	1	$\overline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$	α^2
10	1	1	$\overline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$	1	1	$\overline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$	α^2	α^2	$\overline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$	α^2	α^2
11	1	$\overline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$	α^2	1	$\overline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$	α^2	$\overline{\alpha}$	α^2	α^2	$\overline{\alpha}^3$	$\overline{\alpha}$	α^2	α^2	$\overline{\alpha}^3$
12	1	1	$\overline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$	α^2	α^2	1	1	$\overline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$	α^2	α^2
13	1	$\overline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$	α^2	$\overline{\alpha}$	α^2	α^2	$\overline{\alpha}^3$	1	$\overline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$	α^2	$\overline{\alpha}$	α^2	α^2	$\overline{\alpha}^3$
14	1	1	$\overline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$	α^2	α^2	$\overline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$	α^2	α^2	α^2	α^2	$\overline{\alpha}^3$	$\overline{\alpha}^3$
15	1	$\overline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$	α^2	$\overline{\alpha}$	α^2	α^2	$\overline{\alpha}^3$	$\overline{\alpha}$	α^2	α^2	$\overline{\alpha}^3$	α^2	$\overline{\alpha}^3$	$\overline{\alpha}^3$	α^4

Таблица 7

Индикаторные матрицы ФЗС Уолша-подобных систем 16-го порядка

$i \setminus j$	1	2	3	4	5
1	$\begin{pmatrix} 0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 0&0&1&0\\0&1&1&1\\1&1&1&0\\0&1&0&0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0&1&1&1\\0&0&0&1\\1&1&0&1\\0&1&0&0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\1&1&1&0\\0&1&1&1\\0&0&1&0 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 0&1&1&1\\1&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&1&0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0&0&1&0\\1&0&1&1\\1&0&0&0\\1&1&1&0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\1&0&0&0\\1&1&0&1\\1&1&1&0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0&1&1&1\\1&1&0&1\\1&0&1&1\\1&1&1&0 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1&0&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1&1&0&1\\0&1&0&0\\0&1&1&1\\0&0&0&1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&0&1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1&0&1&1\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\1&1&0&1 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 1&0&1&1\\0&1&1&1\\1&1&1&0\\1&1&0&1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1&1&1&0\\0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\1&1&1&0\\0&0&1&0\\1&0&1&1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1&1&0&1\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\1&0&1&1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1&1&0&1\\1&1&1&0\\0&1&1&1\\1&0&1&1 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 1&1&1&0\\1&1&0&1\\0&1&1&1\\1&0&1&1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\\0&1&1&1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1&1&0&1\\1&1&1&0\\1&0&1&1\\0&1&1&1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1&1&1&0\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\0&1&1&1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1&1&1&0\\1&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&1&1 \end{pmatrix}$

Индексы ij индикаторных матриц $\boldsymbol{J}_{ij}^{(g)}$ ФЗС Уолша-подобных систем 16-го порядка составляются из номеров строк i и столбцов j табл. 7. В частности, ИМ операторов циклического сдвига на один разряд вправо $\boldsymbol{J}_r = \boldsymbol{J}_{13}$ и влево $\boldsymbol{J}_l = \boldsymbol{J}_{23}$ имеют вид

$$\boldsymbol{J}_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{J}_l = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (25)$$

Легко убедиться в том, что расчеты ФЗС систем $\boldsymbol{S}_{N,r}^{(g)}$ и $\boldsymbol{S}_{N,l}^{(g)}$, представленных табл. 5 и 6, выполненные как перестановкой базисных функций матрицы Уолша-Пэли (табл. 4) посредством ИМ (25), так и по формулам прямых вычислений (21)-(24) совпадают, что является подтверждением корректности разработанных алгоритмов синтеза систем функций золотого сечения.

Инверсией столбцов индикаторных матриц, представленных в табл. 7, приходим к левосторонне симметричным матрицам, обеспечивающих формирование совокупности Адамара-связанных Уолша-подобных ФЗС систем, состоящей из того же набора элементов (ИМ), что и совокупность Пэли-связанных систем.

Выводы. В данной работе на основе метода возведения в кронекерову степень первородной матрицы, представляющей собой матрицу Адамара второго порядка, в которой элемент -1 замещен элементом $-\alpha$, равным отношению золотой пропорции (2), предложен алгоритм синтеза Уолша-Кронекера системы функций золотого сечения двоично-степенного порядка. Система Уолша-Кронекера, являющаяся аналогом системы Уолша, упорядоченной по Адамару, совместно с взаимно-однозначно связанной с ней операцией двоично-инверсной перестановки базисных функций системой Уолша-Пэли посредством так называемых индикаторных матриц обеспечивают возможность составления полного множества ФЗС систем двоично-степенного порядка N.

Индикаторными служат невырожденные над полем F_2 левосторонне симметрические (для Адамара-связанных) или правосторонне симметрические (для Пэли-связанных ФЗС систем $\boldsymbol{W}_N$) матрицы $\boldsymbol{J}_w$ порядка $n = \log_2 N$, вес столбцов (и строк) которых, оцениваемый числом единичек в столбце (строке) индикаторной матрицы, равен нечетному числу.

Области применения в науке и технике, а также оценку эффективности предлагаемых квазиортогональных ФЗС систем предполагается уточнить в отдельной работе, посвященной анализу разработанных базисов функций золотого сечения.

ЛИТЕРАТУРА

[1]. Залманзон, Л. А. Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях / Л. А. Залманзон. – М.: Наука, 1989. – 496 с.

[2]. Драгман, Э. Е. Быстрые дискретные ортогональные преобразования / Э. Е. Драгман, Г. А. Кухарев. – Новосибирск: Наука, 1983. – 230 с.

[3]. Макаров, В. Ф. Ортогональные функции Уолша в системах защиты информации / В.Ф. Макаров, В. Н. Афонин. // Информационные системы и технологии, 2010, № 2 (58). – С. 119-129.

[4]. Хармут, Х. Ф. Передача информации ортогональными функциями: Пер. с англ. / Х. Ф. Хармут. – М.: Связь, 1975. – 272 с.

[5]. Ахмед, Н. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов / Н. Ахмед, К. Р. Рао. – М.: Связь, 1980. – 248 с.

[6]. Трахтман, А. М. Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. / А. М. Трахтман, В. А. Трахтман. – М.: Сов. радио, 1975. – 208 с.

[7]. Хармут, Х. Ф. Теория секвентного анализа: Пер. с англ. / Х. Ф. Хармут. – М.: Мир, 1980. – 576 с.

[8]. Артемьев, М. Ю. Алгоритм формирования симметричных систем систем функций Уолша / М. Ю. Артемьев, Г. П. Гаев, Т. Э. Кренкель, А. П. Скотников // Радиотехника и электроника, 1978, № 7. – С. 1432-1440.

[9]. Стахов, А. П. Коды золотой пропорции / А. П. Стахов. – М.: Сов. Радио и связь, 1984. – 152 с.

[10]. Белецкий, А. Я. Индикаторные матрицы систем функций Уолша. / А. Я. Белецкий. // Вісник СумДУ. Серія Технічни науки, № 4, 2009. – С. 85-93.

[11]. Блейхут, Р. Теория и практика кодов, контролирующих ошибки. / Р. Блейхут. – М.: Мир, 1986. – 576 с.

[12]. Белецкий, А. Я. Комбинаторика кодов Грея. / А. Я. Белецкий. – К.: Изд-во КВІЦ, 1986. – 506 с.

REFERENCES

[1]. Zalmanzon L.A. Fourier, Walsh, Haar and their application in management, communication and other

areas. / L. Zalmanzon. – Moscow: Nauka, 1989. – 496 p.

[2]. Dragman, E. E. Fast discrete orthogonal transformation / E. E. Dragman, G. A. Kuharev. – Novosibirsk: Nauka, 1983. – 230 p.

[3]. Makarov, V. F. Orthogonal Walsh function in the protection of the information systems / V. F. Makarov, V. N. Afonin. // Information Systems and Technology, 2010, № 2 (58). – pp. 119-129.

[4]. Hartmut, H. F. Transfer of information orthogonal functions/ H. F. Hartmut. – M.: Communication, 1975. – 272 p.

[5]. Ahmed N. orthogonal transformation in the processing of digital signals / N. Ahmed, K. R Rao. – M.: Communication, 1980. – 248 c.

[6]. Trahtman A. M. Fundamentals of the theory of finite signals on finite intervals. / A. M. Trahtman. – M.: Sov. radio, 1975. – 208 p.

[7]. Hartmut, H. F. Theory sequention Analysis H. F. Harmut. – M.: Mir, 1980. – 576 p.

[8]. Artemyev, M. The algorithm for generating symmetric systems of Walsh function / M. Artemyev, G.P. Guai, T.E. Ernst, A.P. Cattlemen // Technology and Electronics, 1978, № 7. – pp. 1432-1440.

[9]. Stakhov, A. P. Codes of the Golden Proportion / A.P. Stakhov. – M.: Sov. Radio and Communications, 1984. – 152 p.

[10]. Beletsky, A.Ja. Indicator matrix systems of Walsh functions. / A.Ja. Beletsky. // News SumDU. Series Engineering, № 4, 2009. – pp. 85-93.

[11]. Blahut R. Theory and Practice of Error Control Codes. / R. Blahut. – M.: Mir, 1986. – 576 p.

[12]. Beletsky, A. Ja. Combinatorics Gray codes. / A. Ja. Beletsky. – K.: Publ. house KVITS, 1986. – 506 p.

СИНТЕЗ СИМЕТРИЧНИХ СИСТЕМ ФУНКЦІЙ ЗОЛОТОГО ПЕРЕРІЗУ

У статті розглядаються питання формування симетричних Уолша-подібних систем функцій золотого перерізу (ФЗП) двійковій-степеневого порядку. В основу побудови систем ФЗП покладено метод кронекерова множення, який застосовується при синтезі систем Уолша-Кронекера. Матриця, що породжує системі Уолша-Кронекера, є матриця Адамара другого порядку, в якій елемент -1 заміщений елементом - α , рівним відношенню золотий пропорції. Запропоновано алгоритми прямого складання систем ФЗП довільного двійково-ступеневого порядку, аналогічних системам Уолша-Адамара і Уолша-Пелі. Синтез повної множені симетричних ФЗП систем здійснюється перестановкою базисних функцій систем Уолша-Пелі. Правила перестановки функцій встановлюються індикаторними матрицями відповідних систем. Індикаторними служать невироджені над полем F_2 симетричні щодо допоміжної діагоналі (0,1)-матриці, причому вага кожного стовпчика повинна бути непарним числом.

Ключові слова: системи функцій Уолша, індикаторні матриці систем Уолша, кронекерово множення, золота пропорція, Уолша-подібні системи функцій золотого перерізу.

SYNTHESIS OF SYMMETRICAL FUNCTIONS OF GOLDEN RATIO

The article deals with the formation of symmetric Walsh-like systems functions of the golden ratio (FGR) binary-power order. The basis of the construction of systems FGR on the method of Kronecker product, which is used in the synthesis of the Walsh-Kronecker systems. Generating matrix for the Walsh-Kronecker systems is the Hadamard matrix of the second order, in which the element is substituted with an element -1 on - α , equal to the ratio of the golden ratio. Algorithms direct preparation systems FGR arbitrary binary-power order, similar to the Walsh-Hadamard and Walsh-Paley. Synthesis of the full set of symmetrical systems FGR carried permutation of basic functions systems, the Walsh-Paley. Rules permutation function sets the indicator matrix of the corresponding systems. Nondegenerate indicator is symmetrical with respect to the field of auxiliary diagonal (0,1) matrix, where in the weight of each column (as rows) of the matrix, equal to the sum of ones, must be an odd number.

Keywords: the system of Walsh functions, matrix indicator Walsh systems, Kronecker multiplication, the golden proportion, Walsh-like system of the golden ratio functions.

Білецький Анатолій Якович, доктор технічних наук, професор, заслужений діяч науки і техніки України, лауреат Державної премії України в галузі науки і техніки, професор кафедри електроніки Національного авіаційного університету.
E-mail: abelnau@ukr.net

Белецкий Анатолий Яковлевич, доктор технических наук, профессор, заслуженный деятель науки и техники Украины, лауреат Гос. премии Украины в области науки и техники, профессор кафедры электроники Национального авиац. ун-та.

Beletsky Anatoly, Doctor of Science, Professor, Honored Scientist of Ukraine, Laureate of the State Prize of Ukraine in Science and Technology, Professor of Department Electronics of National Aviation University.

Лужецький Володимир Андрійович, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри захисту інформації Вінницького національного технічного університету.
E-mail: lva@mail.ru

Лужецкий Владимир Андреевич, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой защиты информации Винницкого национального технического университета.

Luzhetsky Volodymyr, Doctor of Science, Professor, Head of Information Security Academic Department, Vinnytsia National Technical University.